Всероссийская научно-практическая конференция обучающихся, посвящённая 310-летию М.В. Ломоносова
«Познаём. Исследуем. Проектируем.»

Секция: математика

Тема: Задачи на расположение корней квадратного трехчлена

Автор:
Евсюков Михаил Дмитриевич, 9 класс МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ» Ленинского района г. Новосибирска.

Научный руководитель:
Охотина Людмила Михайловна, учитель математики в.к.к. МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ»

Новосибирск 2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика является одним из обязательных предметов ОГЭ и ЕГЭ. Данная тема позволяет успешно решать задания повышенной сложности.

В экзаменационных заданиях очень часто встречаются задачи, в которых необходимо знать от чего зависит расположение корней квадратного трёхчлена. Знание рассмотренного далее материала значительно облегчает решение таких задач. Чем и объясняется ***актуальность*** темы.

Проблемой моей работы стало отсутствие рассматриваемой темы в школьной программе по математике.

Целью работы является разработка подхода решения задач, требующих знания ситуаций расположения корней квадратного уравнения.

Задачи данной работы следующие:

1) рассмотреть теоремы о расположении корней квадратного трехчлена;
2) обосновать необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена;
3) выполнить сбор задач по каждой теореме;
4) проанализировать решения задач на расположение корней квадратного трехчлена.

Объектом исследования работы является квадратный трехчлен.

Предмет исследования: разработанный подход решения задач на расположение корней квадратного трехчлена.

Методы исследования в данной работе были применены следующие: поисковый, анализ и синтез.

Работа состоит из двух глав: теоретической и практической.

1. РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе приняты следующие обозначения: x_1 и x_2, –корни квадратного трехчлена f(x), $x_1 \le x_2$, D – дискриминант f(x), $x_в$ – координата вершины параболы, являющейся графиком f(x).

Перед началом работы также следует повторить основные понятия.

Квадратным трехчленом называется выражение: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ [2]. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a>0$, вниз при $a<0$. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа (здесь и далее во всех рассматриваемых примерах действует условие $a \neq 0$) называется квадратным уравнением [2].

Параметр – некая скрытая постоянная. Координата $x_в$ находится по формуле $x_в = \frac{-b}{2a}$.

Дискриминант квадратного трехчлена находится по формуле [2]

$D = b^2 - 4ac$.

Если $D<0$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Если $D>0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, а график функции f(x) пересекает ось Ox в двух точках: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Если $D=0$, то график функции касается оси Ox, а уравнение имеет два совпадающих корня: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Решение большинства задач с параметром, в которых необходимо провести исследование квадратного трехчлена, сводится к определению необходимых и достаточных условий реализации одного или нескольких из рассматриваемых далее условий.

1.1 Теоремы о расположении корней

Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена не входят непосредственно ни в школьную программу по математике, ни в программу для поступающих в ВУЗы [1], поэтому выпускник или абитуриент, пользуясь ими, вообще говоря, должен уметь их доказывать. В то же время, обоснование теорем о расположении корней квадратного трехчлена строится на элементарных фактах школьной математики. Приведу доказательства семи теорем [4].

Теорема 1 (оба корня уравнения больше некоторого числа n)

Чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше некоторого числа n, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \cdot f(n)} > 0, \\ \boldsymbol{D \geq 0}, \\ \boldsymbol{x}_{\text{в}} > n; \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Чтобы парабола (см. рис. 1, 2) – график функции f(x) = ax^2 + bx + c – пересекала ось OX в точках (x_1; 0) и (x_2; 0), лежащих правее точки (n; 0), необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1. вершина параболы – либо лежит в нижней полуплоскости, либо в верхней полуплоскости, либо на оси OX (условие D≥0);
2. ось симметрии параболы – прямая $x_{\text{в}} = \frac{-b}{2a}$ - лежит правее прямой x=n (условие: $x_{\text{в}} > n$);
3. парабола пересекается с прямой x = n в точке, лежащей в верхней полуплоскости при a>0 и в точке, лежащей в нижней полуплоскости, при a<0

(условие: a·f(n) >0).

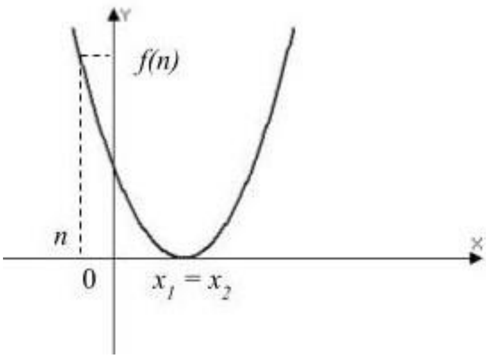


Рис.1

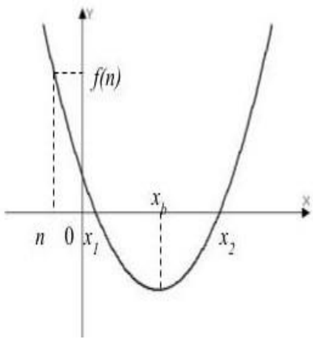


Рис.2

Доказательство теоремы

Достаточность: так как D≥0, то квадратный трёхчлен имеет два корня: x_1 и x_2; пусть $x_1 \leq x_2$. Так как вершина параболы расположена между корнями трехчлена, т.е. $x_1 \leq x_{\text{в}} \leq x_2$, и, по условию, $n < x_{\text{в}}$, то

$n < x_{\text{в}} \leq x_1$. Воспользуемся теоремой о разложении квадратного трёхчлена на множители и запишем значение трехчлена в точке n, учтем при этом условие f(n) > 0 и уже доказанное неравенство $x_2 > n$:

f(n) =a·(n – x_1)·(n – x_2).

Сравнение знаков левой и правой частей этого неравенства приводит нас к выводу, что выполнено неравенство $n - x_1 < 0$, т.е. $x_1 > n$.

Необходимость. Так как трёхчлен имеет два корня, то дискриминанте D≥0.

Так как $x_1 > n$ и $x_2 > n$, то $x_1 + x_2 > 2n$, поэтому

$$x_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{2n}{2} = n.$$

По теореме о разложении на линейные множители, с учетом известных по условию знаков, получим: $f(n) = a\cdot(n-x_1)\cdot(n-x_2)$, из которой следует, что $f(n)>0$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (оба корня уравнения меньше некоторого числа n)

Чтобы оба корня квадратного трехчлена f(x) были меньше некоторого числа m, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \cdot f(m)} > 0, \\ \boldsymbol{D \geq 0}, \\ \boldsymbol{x}_{\text{в}} < m; \end{cases}$$

Доказательство теоремы.

Достаточность*:* так как $D \geq 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня: x_1 и x_2; пусть $x_1 \leq x_2$.

Так как вершина параболы расположена между корнями трехчлена, т.е. $x_1 \leq x_{\text{в}} \leq x_2$, и, по условию, $m > x_{\text{в}}$, то $x_1 < x_{\text{в}} \leq m$. Воспользуемся теоремой о разложении квадратного трехчлена на множители и запишем значение трехчлена в точке m, учтём при этом условие $f(m)>0$ и уже доказанное неравенство $x_2 < m$:

$f(m) = a\cdot(m - x_1)\cdot(m - x_2)$.

Сравнение знаков левой и правой частей этого неравенства приводит к выводу, что выполнено неравенство $m-x_1 > 0$, т.е. $m > x_2$.

Необходимость. Так как трехчлен имеет два корня, то $D \geq 0$. Так как $m > x_2$ и $m > x_1$, то $x_1 + x_2 < 2m$, поэтому

$$x_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{2m}{2} = m.$$

По теореме о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители, с учётом известных по условию знаков, получим:

$f(m) = a\cdot(m-x_1)\cdot(m-x_2)$, из которой следует, что $f(m)>0$.

Что и требовалось доказать.

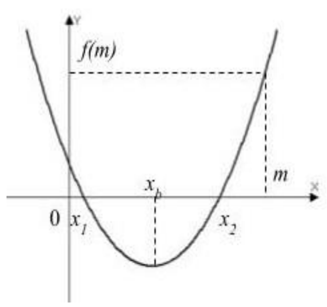


Рис.3

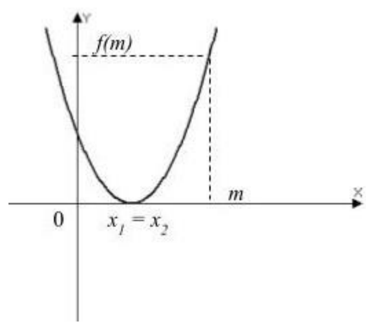


Рис.4

Теорема 3 (оба корня уравнения принадлежат промежутку (n, m))

Чтобы оба корня квадратного трехчлена f(x) принадлежали заданному промежутку (n; m), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \cdot f(n)} > 0, \\ \boldsymbol{a \cdot f(m)} > 0, \\ \boldsymbol{D \geq 0}, \\ \boldsymbol{n} < \text{x}_\text{в} < m; \end{cases}$$

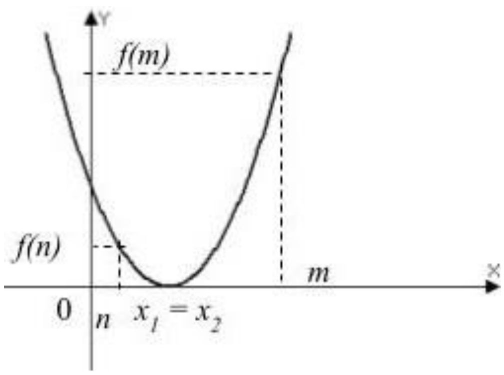


Рис.5

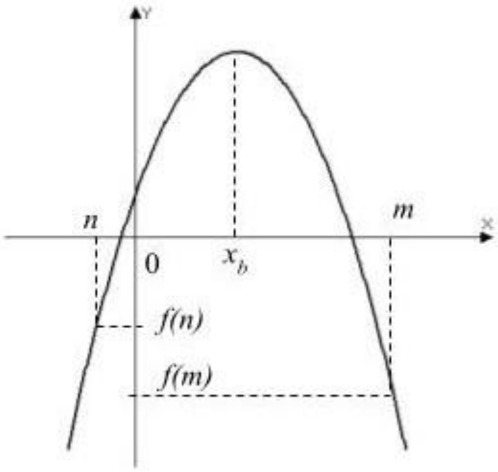


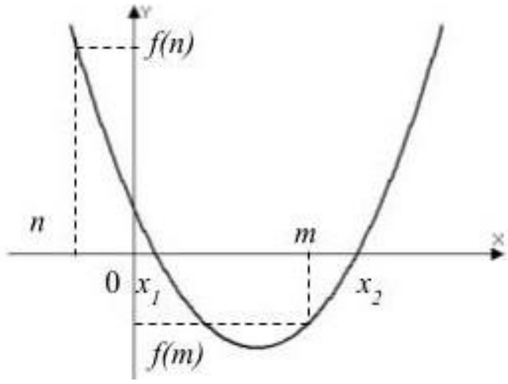
Рис. 6

Доказательство этой и дальнейших теорем опираются на доказательства двух предыдущих, поэтому рассматриваться не будут.

Теорема 4 (меньший корень принадлежит промежутку (n, m))

Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена f(x) принадлежал заданному промежутку (n; m), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \cdot f(n) > 0}, \\ \boldsymbol{a \cdot f(m) < 0}, \\ \boldsymbol{D} > 0; \end{cases}$$



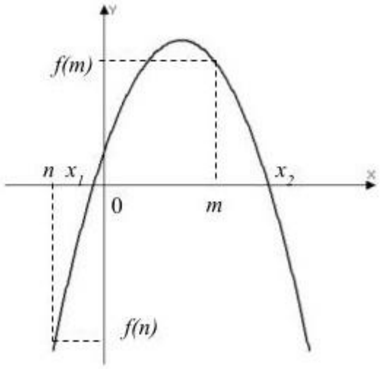
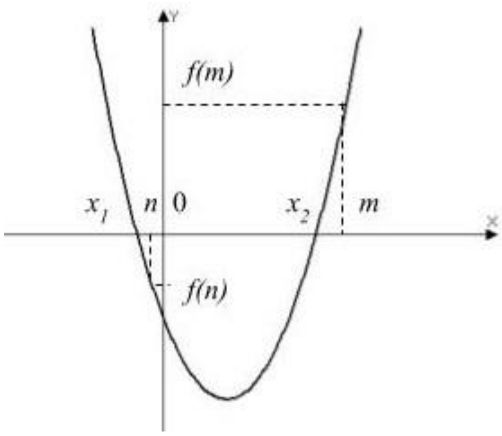


Рис. 7 Рис.8

Теорема 5 (больший корень принадлежит промежутку (n, m))

Чтобы только больший корень квадратного трехчлена f(x) принадлежал заданному промежутку (n; m), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \cdot f(n) < 0}, \\ \boldsymbol{a \cdot f(m)} > 0, \\ \boldsymbol{D} > 0; \end{cases}$$



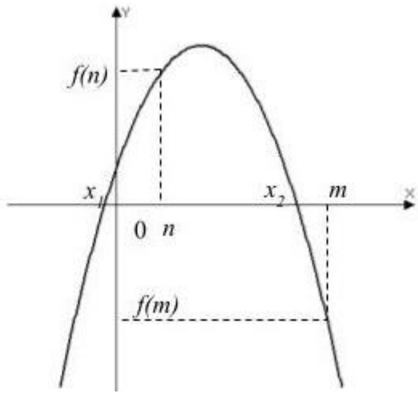


Рис. 9 Рис. 10

теорема 6 (оба корня лежат вне промежутка (n, m))

Чтобы оба корня квадратного трехчлена f(x) лежали вне заданного промежутка (n; m), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{a \cdot f(n) < 0}, \\ \boldsymbol{a \cdot f(m) < 0}, \\ \boldsymbol{D > 0}; \end{array}\right.$$

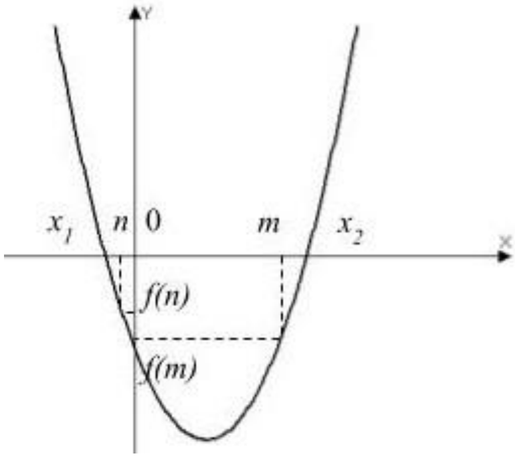


Рис. 11

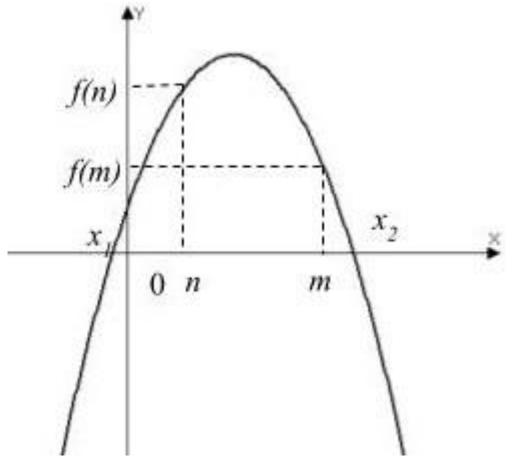


Рис. 12

Теорема 7 (точка расположена между корнями)

Чтобы один из корней квадратного трехчлена f(x) был больше заданного числа n, а другой меньше, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{a \cdot f(n)} < 0, \\ \boldsymbol{D} > 0. \end{array}\right.$$

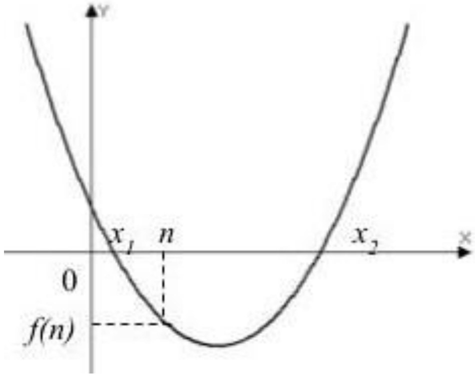


Рис. 13

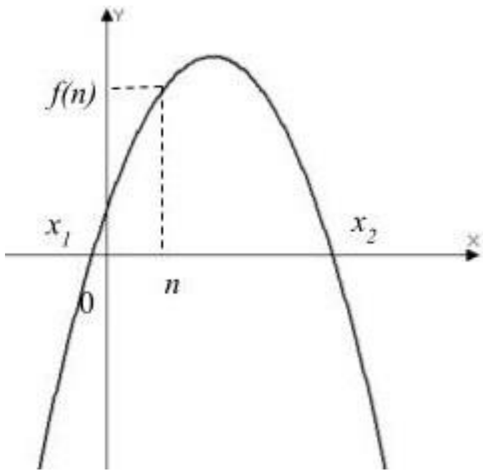


Рис. 14

1.2 Необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена

В результате работы с теорией было решено структурировать всю информацию в одну таблицу, представленную ниже:

Теорема о расположении корней квадратного трехчлена.	Утверждение о расположении корней x_1 и x_2, (x_1<x_2) квадратного трёхчлена f(x)=ax^2+bx+c относительно заданных чисел n, m (n<m).	Необходимые и достаточные условия
1.	Оба корня больше **n**	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_в > n; \end{cases}$
2.	Оба корня меньше **m**	$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ D \geq 0, \\ x_в < m; \end{cases}$
3.	Оба корня принадлежат промежутку **(n, m)**	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D \geq 0, \\ n < x_в < m; \end{cases}$
4.	Меньший корень принадлежат промежутку **(n, m)**	$\begin{cases} a \cdot f(n) > 0 \\ a \cdot f(m) < 0 \\ D > 0 \end{cases}$
5.	Больший корень принадлежат промежутку **(n, m)**	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) > 0, \\ D > 0, \end{cases}$
6.	Оба корня уравнения лежат вне промежутка **(n, m)**	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ a \cdot f(m) < 0, \\ D > 0; \end{cases}$
7.	Точка **n** расположена между корней уравнения	$\begin{cases} a \cdot f(n) < 0, \\ D > 0. \end{cases}$

2. Практическая часть

Следующий этап – закрепление теории при решении задач.

Задача (к теореме 1)

При каких значениях параметра **p** оба корня уравнения

$x^2 + 5x + 7 - 2p = 0$ больше числа -5?

Решение: $\begin{cases} D > 0, \\ 1 \cdot f(-5) > 0,3 \\ x_в > -5. \end{cases}$

1) D=25-4(7-2p)>0 $\Rightarrow$ 25-28+8p>0 $\Rightarrow$ p>$\frac{3}{8}$
2) f(-5)=25-25+7-2p>0 $\Rightarrow$ $p < 3{,}5$
3) $x_в = \frac{-5}{2}$.

Следовательно, $p \in (\frac{3}{8}; 3{,}5)$.

Задача (к теореме 2)

Найдите все значения **p**, при которых уравнение

$x^2 + 2(p-1)x + 4p - 7 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

Решение: $\begin{cases} D > 0, \\ 1 \cdot f(0) > 0 \\ x_в < 0 \end{cases}$

1) $D_1 = (p-1)^2 - (4p-7) = p^2 - 2p + 1 - 4p + 7 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p^2 - 6p + 8 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$
2) f(0)=0+2(p-1)$\cdot 0 + 4p - 7 > 0 \Rightarrow p > \frac{7}{4}$
3) $x_в = \frac{-2(p-1)}{2} < 0 \Rightarrow -p + 1 < 0 \Rightarrow p > 1$

Следовательно, $p \in (\frac{7}{4}; 2) \cup (4; +\infty)$

Задача (к теореме 3)

Найдите все значение параметра **а**, при которых все корни уравнения

$x^2-2(a-3)x-a+3=0$ лежат в интервале (-3;0).

Решение: $\begin{cases} 1\cdot f(0)>0, \\ 1\cdot f(-3)>0, \\ -3<x_в<0, \\ D\geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3)=9+6(a-3)-a+3>0, \\ f(0)=-a+3>0, \\ -3<x_в<0, \\ D=4(a-3)^2+4(a-3)\geq 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a-6>0, \\ -a+3>0, \\ -3<x_в<0, \\ 4(a-3)(a-2)\geq 0. \end{cases} \Rightarrow a\in(1{,}2;2]$

Следовательно, $a\in(1{,}2;2]$

Задача (к теореме 4)

При каких значениях параметра **а** только меньший корень уравнения

$x^2-2ax+a=0$ принадлежит интервалу $(0;3)$?

Решение: $\begin{cases} 1\cdot f(0)>0 \\ 1\cdot f(3)<0 \\ Д_1>0 \end{cases} \Rightarrow$a>1,8.

Следовательно, a>1,8

Задача (к теореме 5)

При каких значениях параметра **а** только больший корень уравнения

$x^2+4x-(a+1)(a+5)=0$ принадлежит промежутку (-1;0)?

Решение: $\begin{cases} 1\cdot f(-1)<0 \\ 1\cdot f(0)>0 \\ Д_1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-4)\cup(-2;\infty) \\ a\in(-5;-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ a\in(-5;-4)\cup(-2;-1)$ т.к.

f(-1)==1-4-(a+1)(a+5)<0$\Rightarrow 1-4-a^2-6a-5<0 \Rightarrow a^2+6a+8>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a $\in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$,

$f(0) = -(a+1)(a+5) < 0 \Rightarrow a \in (-5; -1)$.

Следовательно, a $\in (-5; -4) \cup (-2; -1)$.

Задача (к теореме 6)

При каких значениях параметра а один корень уравнения

(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0 больше 3, а другой меньше 2?

Решение: $\begin{cases} (a-2)f(2) < 0 \\ (a-2)f(3) < 0 \\ Д_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-2)(4a-29) < 0 \\ (a-2)(7a-36) < 0 \\ a \in (-\frac{19}{30}; 5\frac{9}{30}) \end{cases} \Rightarrow a \in (2; 5)$

f(2)=(a-2)4-2(a+3)2+4a=4a-20

f(3)=(a-2)9-18-6a-18+4a=7a-36

$Д_1 = (a+3)^2 - (a-2)4a > 0 \Rightarrow a \in (-\frac{19}{30}; 5\frac{9}{30})$

Следовательно, a $\in (2; 5)$.

Задача (к теореме 6) [3]

Найти все значения k, при которых один корень уравнения(k+1)x^2+2(3k+5)x+5(2k+5)=0 меньше -3 , а другой – больше- 1?

Решение: $\begin{cases} (k+1) \cdot f(-3) < 0, \\ (k+1) \cdot f(-1) < 0, \\ D > 0; \end{cases}$

1) (k+1)((k+1)$(-3)^2$+2(3k+5)(-3)+5(2k+5))< 0 $\Rightarrow$ (k+1) (9k+9-18k-30+10k+25)<0 $\Rightarrow$ (k+1)(k+4)<0 $\Rightarrow$ k$\in$(-4; 1)

2) (k+1)((k+1)$(-1)^2$+2(3k+5)(-1)+5(2k+5))<0$\Rightarrow$ (k+1)(k+1-6k-10+10k+25)<0 $\Rightarrow$ (k+1)(5k+16)<0 $\Rightarrow$ k$\in$($-\frac{16}{5}$; -1).

3) $(6k+10)^2$-4(k-1)(5(2k+5))>0$\Rightarrow$36k^2+120k+100-40$k^2 - 140k$-100>0$\Rightarrow$k(k+5)<0 $\Rightarrow$ k$\in$(-5; 0).

Следовательно k $\in$ ($-\frac{16}{5}$; -1).

Задача (к теореме 7)

При каких значениях **а** корни $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$ лежат по разные стороны от числа 3?

Решение: $\begin{cases} 1 \cdot f(3) < 0; \\ Д > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 9 - (2a + 1)3 + 4 - a < 0 \\ (2a + 1)^2 - 4(4 - a) > 0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{10}{3}.$$

Следовательно, $a > \frac{10}{3}$.

Таким образом, теперь я знаю необходимые и достаточные условия для наиболее частых случаев расположения точек на плоскости относительно корней квадратного трехчлена.

Заключение

К основным результатам работы можно отнести следующее:

1) рассмотрены теоремы о расположении корней квадратного трехчлена;
2) обоснованы необходимые и достаточные условия расположения корней квадратного трехчлена;
3) приведены примеры задач по каждой теореме;
4) решения задач проанализированы.

Теперь я знаю необходимые и достаточные условия для наиболее частых случаев расположения точек на плоскости относительно корней квадратного трехчлена, будь то слева от корней, справа от них, между, либо относительно лишь одного корня, а результаты работы были переведены в удобный для восприятия формат таблицы.

Проблема работы решена: я смог разобрать тему, которая не рассматривается в школьной программе, но пригодится в будущем для сдачи ОГЭ и ЕГЭ по математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С. Ю. Математика. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. Изд-во Легион, учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», 2014г. – 64 с.

2. Макарычев Ю.Н., Нешков К. И., Суворова С. Б. Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС. Изд-во: Просвещение, 2021г. – 287 с.

3. Старкон Ю. Н. 165 задач с параметрами – URL: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/165.pdf (дата обращения: 20.10.2021).

4. Утверждения о расположении корней квадратного трехчлена URL: http://mschool.kubsu.ru/cdo/shabitur/kniga/sprav/function/kvfunc/korni/korni.htm (дата обращения 13.11.2021).

5. Яковлев И. В. Параметры и квадратный трехчлен – URL: https://mathus.ru/math/parameter-quad2.pdf (дата обращения: 21.10.2021).