

Октябрьский район
МАОУ Гимназия №11 «Гармония»

Секция «Математика»
Багазий Виктория Викторовна
9И класс

Принцип Дирихле в геометрии

научный руководитель:
к.п.н., доцент каф. алгебры и математического анализа НГПУ;
Тропина Наталья Валерьяновна

Учитель математики:
Учитель высшей категории
Шпигунова Лариса Валерьевна

Новосибирск, 2021

Оглавление

Введение	3
Принцип Дирихле	4
Формулировка и доказательство принципа Дирихле	4
Обобщённый принцип Дирихле и его доказательство	4
Принцип Дирихле в геометрии	6
Аналоги принципа Дирихле в геометрии.....	6
Принцип Дирихле в геометрии. Точки.....	6
Задачи, решённые самостоятельно	8
Заключение.....	12
Списки литературы.....	12

Введение

Актуальность данной работы: иногда задачи могут решаться разными способами, в том числе и методом от противного, поэтому он является полезным и интересным для изучения, так как охватывает различные сферы наук.

Объект исследования: принцип Дирихле.

Предмет исследования: применение принципа Дирихле для решения геометрических задач.

Цель исследовательской работы: обоснование принципа Дирихле и возможностей его применения для решения некоторых геометрических задач.

Задачи данной работы:

1. Изучить принцип Дирихле и обобщенный принцип Дирихле, обосновать их.
2. Рассмотреть применение принципа Дирихле для решения стандартных задач.
3. Отыскание задач с геометрическим содержанием и самостоятельное решение их с помощью принципа Дирихле.

Методы исследования.

1. Поисковый метод – нахождение нужной информации.
2. Метод анализа – обобщение полученных данных.
3. Теоретический метод – использование научной и учебной литературы, доказательство математических утверждений.
4. Практический метод – применение полученных знаний для решения олимпиадных задач.

Работа состоит из двух частей. В первой раскрывается и доказывается принцип Дирихле и обобщенный принцип Дирихле, во второй Принцип Дирихле применяется к решению задач с геометрическими объектами. Приводятся решения 13 задач.

1. Принцип Дирихле

Густав Лежён Дирихле родился 13 февраля 1805 года в вестфальском городе Дюрене. Хотя семья не была богатой, и он был самым младшим из семи детей, родители занимались его образованием. Они записали мальчика в начальную школу, а затем – в частную школу в надежде, что он позже станет торговцем. Молодой Дирихле, который проявлял большой интерес к математике, убедил своих родителей позволить ему продолжить учёбу.

Г. Л. Дирихле принадлежит ряд крупных открытий в самых разных областях математики, а также в механике и математической физике.

1.1. Формулировка и доказательство принципа Дирихле

Теорема 1. Если по n клеткам рассаживать более n кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит больше одного кролика.

Доказательство. Применим метод доказательства «от противного». Пусть суждение не верно, значит, в любой клетке сидит не более одного кролика. Тогда всех кроликов будет не более n , но по условию их более n , что является противоречием условию.

Проиллюстрируем применение принципа Дирихле на простых примерах.

Пример 1. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдётся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной буквы.

Первый способ. Рассуждать можно методом от противного. Тогда у каждого ученика фамилии начинаются с разных букв. Но тогда $n = 35$. А в алфавите только 30 букв, с которых могут начинаться фамилии (слов на ь, ь и ы не существует). Противоречие. Значит, есть хотя бы два ученика у которых фамилии начинаются с одной буквы.

Второй способ.

Пусть буквы алфавита будут “клетками”, а ученики “кроликами”.

В классе 35 учеников, а букв, с которых могут начинаться слова 30, но $35 > 30$, значит для пяти учеников ($35 - 30 = 5$) не хватило буквы (“клетки”). Значит, как минимум, 2 ученика попадут в одну “клетку” и их фамилии будут начинаться с одной буквы.

Пример 2. При каком наименьшем количестве учеников школы среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

Пусть дни года будут “клетками”, а ученики “кроликами”.

Решение. Всего дней в году 365 (n) (есть 366-й день, но дату рождения человека родившегося 29.02 обычно записывают на прошлый или следующий день). Тогда для того, чтобы в одну “клетку” попало хотя бы два “кролика”, “кроликов” должно быть как минимум $n + 1$. Значит, минимальное количество учеников школы – 366.

1. 2. Обобщённый принцип Дирихле и его доказательство

Теорема 2. Если в n клетках сидит не менее $kn + 1$ кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит более k кроликов.

Доказательство. Аналогично доказательству принципа Дирихле, применим «метод от противного». Сначала заметим, что из условия следует $m = kn + 1$, где:

m – кролики, n – клетки. Предположим, что в каждой клетке сидит не более k кроликов. Тогда всего кроликов будет не более, чем kn . А их по условию не менее $kn + 1$. Противоречие.

Проиллюстрируем применение обобщенного принципа Дирихле на простых примерах.

Пример 1. Алёша в среду, четверг и пятницу съел всего 7 конфет. Докажите, что хотя бы в один день он съел более 2-х конфет.

Воспользуемся обобщённым принципом Дирихле.

Пусть дни недели (в которые он ел конфеты) — это клетки, а конфеты – кролики. Тогда

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

Значит, есть минимум 1 день, когда Алёша съел более 2-х конфет.

Пример 2. Машинистка, перепечатывая текст в 25 страниц, сделала 102 ошибки. Докажите, что найдётся страница, на которой сделано более четырёх ошибок.

Воспользуемся обобщённым принципом Дирихле.

пусть страницы — это клетки, а ошибки – кролики.

$$102 = 25 \times 4 + 1$$

Значит, есть минимум одна страница, на которой допущено более 4-х ошибок.

Вывод. Задачи на применение принципов Дирихле можно решать, рассуждая «от противного» (именно этим методом доказываются эти принципы), а можно сразу ссылаться на принцип Дирихле, если удастся в ней распознать модель «клетки-кролики».

Перейдем к решению геометрических задач с помощью принципов Дирихле.

2. Принцип Дирихле в геометрии

Принцип Дирихле может применяться при решении самых разных задач, в которых речь идет о конечном количестве объектов. Это могут быть алгебраические, комбинаторные и даже геометрические задачи.

Самыми простыми геометрическими объектами являются точки, далее – отрезки, лучи и прямые. Далее следуют разнообразные фигуры на плоскости: углы, многоугольники, окружности и круги и т.д.

Пытаясь научиться применять принцип Дирихле при решении геометрических задач, начнем с самых простых из них: где объектами являются точки, расположенные внутри другого геометрического объекта: отрезка, окружности, многоугольника и др.

Сформулируем утверждения, аналогичные принципу Дирихле, но для геометрических образов.

2.1. Аналоги принципа Дирихле в геометрии

Теорема 3. Если на отрезке (окружности) длиной 1 расположено несколько отрезков (дуг), сумма длин которых больше 1, то, по крайней мере, два (две) из них имеют общую точку.

Теорема 4. Если внутри фигуры площади 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству принципов Дирихле в общем виде.

Далее рассмотрим задачи и их решения в порядке усложнения геометрических образов, о которых говорилось выше.

В следующих пунктах представим решения олимпиадных задач, усложняя геометрические образы, о которых в них идет речь.

2.2. Принцип Дирихле в геометрии. Точки

- **Пример 1.** В квадрате 4×4 нарисовано 15 точек. Доказать, что из него можно вырезать квадратик 1×1 , не содержащий внутри себя точек.

Решение. Всего в квадрате 4×4 – 16 маленьких квадратиков 1×1 .

Пойдём методом от противного. Пусть квадрат 1×1 вырезать невозможно. Значит, в каждом квадрате 1×1 есть точка. Тогда в большом квадрате 4×4 будет не менее 16 точек. Но $16 > 15$.

Это противоречит условию. Значит, всегда будет хотя бы один квадрат 1×1 без точки.

- **Пример 2.** В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Доказать, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок.

Решение. Всего в квадрате $10 \times 10 = 100$ маленьких квадратиков 1×1 .

Пойдём методом от противного. Пусть квадрат 1×1 вырезать невозможно. Значит, в каждом квадрате 1×1 моль проела дырку. Тогда в большом квадрате 10×10 будет не менее 100 дырок. Но $100 > 80$.

Это противоречит условию. Значит, всегда будет хотя бы один квадрат 1×1 без точки.

Или: пусть «клетками» будут дыры, а «кроликами» – клетки. Тогда т.к. $100 > 80$, то на каждую дыру приходится не менее двух клеток, т.е. Одна дыра расположена не менее, чем в двух клетках.

Если дыры могут находиться на границе клеток, то:

Разделим квадрат на 81 квадрат со стороной $\frac{10}{9}$ м. Т.к. дырок 80, а квадратов 81, то найдётся один в котором не будет дырок, и из него можно будет вырезать квадрат 1×1

- **Пример 3.** На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся на расстоянии, не большем 1 м.

Решение. Разделим треугольник на маленькие треугольники со стороной 1 м. Тогда треугольников 1×1 будет 9. Пусть «клетками» будут маленькие треугольники, а «кроликами» будут гвоздики.

И тогда «кроликов» – 10, а «клеток» – 9 (смотри рис. 1). Значит, есть, как минимум, две гвоздики, растущие в маленьком треугольнике, и расстояние между ними не более 1 м.

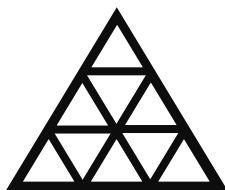


Рис.1. Рисунок к примеру 3.

- **Пример 4.** На плоскости отмечена 101 точка, причём не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красной ручкой проводится прямая. Доказать, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

Доказательство. Здесь выберем метод доказательства от противного. Пусть через каждую из точек проходит не более 10 красных прямых. Рассмотрим одну из таких точек – А. Так как через А проходит не более 10 прямых, а она должна быть соединена с каждой из остальных точек, значит, все 100 точек лежат на этих прямых.

$$100 = 10 \times 10$$

Есть прямая, на которой будет 10 точек, но вместе с А их будет 11, что является противоречием.

Тогда любая точка вне этой прямой соединена с каждой её точкой красной прямой, так как точек не менее 11, то и прямых не менее 11.

2.3. Задачи, решенные самостоятельно

Задачи, представленные в этом пункте, являются задачами олимпиад разного уровня: от школьных до Региональных. Все они были решены самостоятельно, либо с помощью подсказок учителя.

Начнем с простых, не геометрических задач.

Задача 1. В бору 600 000 сосен, и на каждой из них не более 500 000 игл. Докажите, что в этом бору найдутся две сосны с одинаковым количеством игл.

Решение. Если игл на деревьях не более 500 000, то и различных вариаций их количества (от 0 до 500 000) – 500 001.

Пойдём методом от противного. Пусть на всех соснах количество игл разное. Тогда сосен с индивидуальным количеством игл будет 500 001. Но,

$$500\,001 < 600\,000$$

Это противоречит условию. Значит, есть как минимум две сосны с одинаковым количеством игл.

Задача 2. В школе 20 классов. В ближайшем доме живут 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два одноклассника?

Решение. Пусть максимальное количество человек в классе – 20.

Пойдём методом от противного. Пусть в доме нет одноклассников. Тогда максимальное количество детей, которые живут в одном доме и не являются одноклассниками будет: $20 \text{ кл.} \times 1 \text{ уч.} = 20$. Но:

$$23 > 20$$

Значит, в доме живут хотя бы два одноклассника.

Задача 3. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

Решение. Разделим треугольник на маленькие треугольники со стороной 0,5 м. Тогда треугольников $0,5 \times 0,5$ будет 4. Пусть «клетками» будут маленькие треугольники, а «кроликами» будут точки.

И тогда «кроликов» – 5, а «клеток» – 4 (смотри рис. 2). Значит, есть, как минимум, две гвоздики, растущие в маленьком треугольнике, и расстояние между ними не более 1м.

Задача 4. В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

Решение. «Клеток» будет $5 \times 5 = 25$, а «кроликов» – 126. Для того чтобы в 25 клеток равномерно посадить $125+1$ кроликов в каждой клетке будет сидеть 5 кроликов, и в одной из них будет $5 + 1 = 6$. Значит существует 6 точек, находящихся в одном квадрате со стороной 1×1 . И если через его центральную точку провести окружность радиуса 1см, то она полностью охватит квадрат и в окружности всегда будет как минимум 6 точек.

Задача 5. Десять студентов-математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, 2 и 3 задачи. Докажите, что среди них есть студент (по меньшей мере, один), который составил не менее 5 задач (≥ 5).

Решение.

I способ. Всего 10 студентов, 35 задач,

но: есть по крайней мере три студента, один составил 1 задачу, другой – 2, третий – 3 задачи.

Значит, остаются 7 студентов, которые составили 29 задач,

$$29 = 7 \times 4 + 1,$$

Значит, есть минимум один студент, который составил более 4 задач.

II способ.

Пусть «кролики» — это задачи, а «клетки» студенты. Тогда для того, чтобы равномерно распределить 29 «кроликов» по «клеткам», в каждой клетке должно сидеть 4 кролика ($29 = 7 \times 4 + 1$), но в одной клетке кроликов будет $4 + 1$, значит, как минимум один студент составил > 4 задач.

III способ. Пойдём методом от противного: пусть никто не составил более 5 задач. Тогда каждый составил ≤ 4 задач, всего составлено

$$7 \times 4 = 28 \text{ задач}$$

Но $28 < 29$, что противоречит условию. Значит есть как минимум один студент, который составил более 4 задач.

Задача 6. Докажите, что в любом выпуклом $2n$ -угольнике найдётся диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

Решение. Пусть «клетки» — это диагонали, параллельные стороне AB , а «кролики» — это все диагонали.

Диагоналей, параллельных AB не более $n - 2$ (через дальнюю от стороны вершину не может проходить диагональ, параллельная AB). Тогда если всего диагоналей в n -угольнике – $n(2n - 3)$, то диагоналей, параллельных AB не более $2n(n - 2)$

$$n(2n - 3) > 2n(n - 2)$$

$$2n^2 - 3n > 2n^2 - 4n$$

Тогда диагоналей, параллельных AB меньше, чем всех диагоналей, значит, найдётся диагональ не параллельная AB .

Задача 7. Форма рожи – круг радиуса 215 метров. Расстояние между двумя деревьями в ней не менее 10м. Доказать, что в роже менее 1950 деревьев.

Решение. Т.к. расстояние между двумя деревьями не менее 10 м, то вокруг каждого дерева можно очертить окружность $R = 5$, и никакая пара из этих окружностей не пересечётся (могут только коснуться друг друга).

Пусть «кроликами» будут деревья, а клетками окружности $R = 5$.

Тогда все окружности расположены в круге $R = 215 + 5 = 220$ м, (дерево может находиться на краю рожи). Значит, S большого круга будет не менее суммарной S маленьких кругов.

Пусть количество всех деревьев – x . Тогда составим неравенство:

$$\pi \cdot 220^2 \geq \pi \cdot 5^2 \cdot x \Leftrightarrow \\ x \leq 1936.$$

А т.к. $1936 < 1950$, то действительно, деревьев будет менее 1950.

Или иначе. Если предположить противное: в роще не менее 1950 деревьев, то сумма площадей окружающих их кругов больше или равна $\pi \cdot 5^2 \cdot 1950 = 48750\pi$, что больше, чем $\pi \cdot 220^2 = 48400\pi$ (площадь всей рощи «с запасом» в 5 метров). Противоречие.

Задача 8. На плоскости отмечена 101 точка, причём не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красной ручкой проводится прямая. Доказать, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

Решение. Метод от противного: через любые точки проходит не более 10 красных прямых. Возьмём какую-то из них А. Через неё проходит не более 10 прямых. Тогда все 100 точек на них лежат. $100 = 10 \times 10$

Тогда есть прямая, на которой будет 10 точек, а вместе с А их будет 11. Противоречие.

Тогда любая точка вне этой прямой соединена с каждой точкой красной прямой, т.к. точек не менее 11, то и прямых не менее 11.

Задача 9. Плоскость окрашена в два цвета – белый и чёрный, причём имеются точки и чёрного, и белого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Решение. Пусть А – чёрная точка, и все точки на расстоянии 1 от неё (точки окружности $R = 1$) – белые. Тогда вся окружность белая. Впишем в неё треугольник ВАС, так что $\angle BAC = 60^\circ$, тогда $BC = AC = AB = 1$. Значит точки В и С обе белые, и находятся на расстоянии 1 друг от друга.

Задача 10. Плоскость окрашена в два цвета – белый и чёрный, причём имеются точки и того и другого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Возьмём произвольный правильный треугольник АВС.

Рассмотрим две точки разного цвета (они всегда есть), рассмотрим отрезок АВ с концами в этих точках. Если длина его больше 1, то построим точку С, такую, что $AC=1$, $BC=1$. Тогда, т.к. цвета всего два, то либо А и С разного цвета, либо В и С разного.

Если оказалось, что расстояние $AB > 1$, то начинаем откладывать от А отрезки длины 1, если наступим в соседние точки разного цвета, то нашлись. Если нет, то рано или поздно получим точку М, такую, что $MB \leq 1$. Тогда получаем предыдущий случай.

Задача 11. Плоскость окрашена в два цвета – белый и чёрный, причём имеются точки и белого, и точки чёрного цвета. Докажите что всегда найдётся равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

Решение. Возьмём правильный пятиугольник. Тогда по принципу Дирихле три его вершины будут одного цвета, т.к. $5 = 2 \times 2 + 1$. Именно они и образуют искомый треугольник.

Задача 12. Вершины правильного семиугольника окрашены в два цвета – белый и чёрный. Докажите, что среди них обязательно найдутся три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Верно ли такое же утверждение для правильного восьмиугольника?

Решение. По принципу Дирихле найдётся минимум 3 вершины, окрашенные в один цвет т.к. $7 = 2 \times 3 + 1$. Заметим, что, т.к. 7 – нечетное число, то у семиугольника есть две соседние вершины одного цвета. Пронумеруем вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Тогда, если, например, белыми будут вершины 1 и 2, а третья белая – 3 или 7, то получаем равнобедренный треугольник (123 или 712). Если же 7 и 3 – черные, а белой является 5, то 125 – белый равнобедренный. Если же и 5 – черная, то тогда треугольник 357 – равнобедренный черный.

Для восьмиугольника это неверно, пример: красим в белый цвет вершины 1, 2, 5, 6, а в черный – остальные. Нет ни одного одноцветного равнобедренного треугольника (они все прямоугольные, неравнобедренные).

Задача 13. Прямоугольник 20×30 разбит на клетки 1×1 . Можно ли провести прямую, пересекающую по внутренним точкам 50 клеток прямоугольника?

Решение. Предположим, что можно. Тогда при переходе из одной клетки в другую мы пересекаем либо горизонталь, либо вертикаль. А их всего в таком прямоугольнике будет

$$(20 - 1) + (30 - 1) = 48$$

Чтобы пересечь 50 клеток надо, чтобы таких пересечений было минимум 49. Противоречие.

Заключение

В ходе работы над проектом была найдена и изучена нужная информация, изучены вариации Принципа Дирихле, разобраны типы задач, в которых удобнее идти методом от противного, чем обычным решением.

Необычность применения принципа Дирихле к геометрическим задачам вызывала трудности, которые подкрепляли интерес. Хотелось бы научиться решать такие задачи еще лучше, рассмотреть принцип Дирихле в задачах на числа (с применением теории делимости).

Список литературы

1. Википедия.
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров: изд-во «АСА», 1994. – 272 с.
3. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
4. <https://mccme.ru>